Title	環ノ右いである束
Author(s)	前田, 文友
Citation	全国紙上数学談話会. 2(10) p.317-p.323
Issue Date	1948-07-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75240
rights	
Note	

106 環ノ右いでやる束

(廣島文理大) 前田 文友

§1 始ニ上連続束ノ定義及ビ二三ノ性質ヲ述ベル.

<u>定義 1.1</u> 完備束 L ニ於テ有向集合 D ノ元 δ ヲ添字ニモツ L ノ元ノ集合 $(a_\delta;\ \delta\in D)$ ガアルトキ. 任意ノ元 $b\in L$ ニ対シテ

$$a_\delta \uparrow a \quad ナラバ \quad a_\delta \cap b \uparrow a\cap b$$

ガ成立スルトキ L ヲ<u>上連続束</u>トイウ. 双対的ニ下連続束ヲ定義シ, 上連続ニシテ下連続ナル束ヲ<u>連続束</u>トイウ

(コノ連続束ノ定義ガ J. v. Neumann ノ連続幾何学ニ用イタモノト同義デアルコトハ 本号佐々木右左氏 連続幾何学ノ公理ニツイテ" 参照)

<u>補題 1.1</u> 上連続束 L ニ於テ $S\subseteq L$ ナルトキ. S ノ任意ノ有限部分集合 ν ニ対シテ $\vee(a;\ a\in\nu)\wedge b=0$ ナラバ $\vee(a;\ a\in S)\wedge b=0$ デアル.

(証) S ノ有限部分集合 ν ノ全体 D ハ集合論的包含ヲ順序トシテ有向集合デアル. $s_\nu=\vee(a;\ a\in\nu)$, $s=\vee(a;\ a\in S)$ トオケバ, $s_\nu\uparrow s$ デアル. シカルニ仮定ニヨリ $s_\nu\wedge b=0$. $s_\nu\wedge b\uparrow s\wedge b$ デアルカラ, $s\wedge b=0$ デアル.

<u>定義 1.2</u> 完備束 L ノ部分集合 S ガアルトキ. S ノ共通部分ヲモタナイ任意ノ部分集合 S_1, S_2 ニツイテ $\vee(a;\ a\in S_1)\wedge\vee(a;\ a\in S_2)=0$ ナルトキ. S ハ<u>独立系</u>デアルト云イ. $(S)\perp$ デアラワス.

Sガ独立系ナルトキ $\vee(a; a\in S)$ ヲ $\vee(\oplus a; a\in S)$ デアラワス

表現 上連続束ニ於テ、Sガ独立系ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ、Sノスベテノ有限部分集合ガ独立系デアルコトデアル.

(証) 必要ナコトハ明カデアル. 次ニSノスベテノ有限部分集合ノガ独立系デアルトスル. S_1. S_2 ヲSノ共通要素ヲモクナイ任意ノ部分集合トシ、ν_1. ν_2 ヲ夫々 S_1. S_2 ノ任意ノ有限部分集合トスルトキハ 仮定ニヨリ $\nu_1 \frown \nu_2$ ハ独立系デアルカラ

$$\vee(a; a\in \nu_1) \frown \vee(a; a\in \nu_2)=0$$

コレハ S_2 ノ任意ノ有限部分集合 ν_2 ニ対シテ成立スルカラ 補題1.1ヨリ.

$$\vee(a; a\in \nu_1) \frown \vee(a; a\in S_2)=0.$$

コレハヌS ノ任意ノ有限部分集合 ν_1 ニ対シテ成立スルカラ

$$\vee(a; a\in S_1) \frown \vee(a; a\in S_2)=0.$$

従ツテSハ独立系デアル.

補題1.2 上連続可補模束ニ於テ $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_i \leqq \cdots$ ナルトキ.

$$a_i = a_{i-1} \oplus b_i \quad (i=1.2.\cdots) \quad (\text{但シ} a_0=0)$$

トオケバ $\bigvee_{1\leqq i<\infty} a_i = \bigvee_{1\leqq i<\infty} \oplus b_i$ デアル.

(証) $i\leqq j$ ナラバ $b_i \leqq a_i \leqq a_j$ ナレバ $(b_1 \vee \cdots \vee b_{j-1}) \frown b_j \leqq a_{j-1} \frown b_j = 0$.
故ニ $(b_1, \cdots, b_n)\perp$ 従ツテ定理1.1ヨリ $(b_i; i=1.2\cdots)\perp$

$\bigvee_{1\leqq i<\infty} a_i = \bigvee_{1\leqq i<\infty} b_i$ ハ明カデアル.

補題1.3 上連続ニ於テ $a_\delta \uparrow a$ $b_\delta \uparrow b$ ナラバ $a_\delta \frown b_\delta \uparrow a\frown b$ デアル.

〔証〕 $\vee(a_\delta \frown b_\delta; \delta\in D) \geqq \vee(a_\delta \frown b_\gamma; \gamma\in D) = a_\delta \frown b$ ナレバ

$$\vee(a_\delta \frown b_\delta; \delta\in D) \geqq \vee(a_\delta . b, \delta\in D) = a\frown b.$$

他方 $\vee(a_\delta \frown b_\delta; \delta\in D) \leqq a\frown b$ ナレバ $\vee(a_\delta \frown b_\delta; \delta\in D) = a\frown b$

定理1.2 連続束Lノ中心ZハLノ部分束トシテ完備ぶーる束デアル.
〔証〕 中山正氏束論 P.15 ヨリLノ中心ZハLノ部分束トシテぶーる束デアル.
$S\leqq Z$ ナルトキ ν ヲSノ任意ノ有限部分集合トシ. $z_\nu = \vee(z, z\in \nu)$

$a=\vee(z, z\in S)$ トスレバ. $z_\nu \uparrow a$ デアル. $x, y\in L$ ニ對シテ

$$(x\frown y)\cup z_\nu = (x\cup z_\nu)\frown(y\cup z_\nu)$$

ナレバ. 補題1.3ヨリ $(x.y)\cup a=(x\cup a)\frown(y\cup a)$ 他ノ分配式モ同様ニ成立ス

ルカラ　aハ中立元デアル.

Z_νノ補元ヲZ_ν'トシ　$Z_\nu' \leqq b$トスレバ, $1 = Z_\nu \cup Z_\nu' \leqq a \cup Z_\nu'$ ナレバ $1 = a \cup b$. $0 = Z_\nu \cap Z_\nu' \geqq Z_\nu \cap b$ ナレバ $0 = a \cap b$. 故ニ aハ補元ヲモツカラ中心元デアル.

同様ニ $\bigwedge(z; z \in S)$モ中心元デアル. 従ッテZハLノ部分束トシテ完備ブール束デアル.

§2　次ニ環Rノ右いでやる束ニツイテ考ヘル. Rハ単位元1ヲモツトハ限ラナイ.

定理2.1　環Rノ右いでやるノ全体R_rハ集合論的包含ヲ順序トシテ上連続模束デアル. コノトキ, SヲR_rノ任意ノ部分集合トスルトキハ $\bigvee(\mathfrak{a}; \mathfrak{a} \in S)$ハ, Sノ中ノ有限個ノ右いでやる $(\mathfrak{a}_i \ \ i=1,2,\cdots,n)$ヲトッテ $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ $(\alpha_i \in \mathfrak{a}_i)$ノ如クアラワサレル$\alpha$ノ全体デアリ, $\bigwedge(\mathfrak{a}; \mathfrak{a} \in S)$ハ$S$ニ属スルスベテノ右いでやるニ共通ナ元ノ全体デアル.

〔証〕上記ノ関係ニヨリR_rハ完備束ヲ作ルコトハ明カデアリ, 又R_rガ模束ナルコトモヨク知ラレテイル. 次ニ $\mathfrak{a}_\delta \uparrow \mathfrak{a}$ ナルトキ $\alpha \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ トスレバ, $\alpha = \alpha_{\delta_1} + \cdots + \alpha_{\delta_n}$ ナルδ_i $(i=1,\cdots,n)$ガ存在スル. $\delta_i \leqq \delta_0$ $(i=1,\cdots,n)$ ナルδ_0ヲトレバ, $\alpha \in \mathfrak{a}_{\delta_0}$　他方 $\alpha \in \mathfrak{b}$ナレバ, $\alpha \in \mathfrak{a}_{\delta_0} \cap \mathfrak{b}$. 故ニ $\bigvee(\mathfrak{a}_\delta \cap \mathfrak{b} : \delta \in D) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. 即チ $\mathfrak{a}_\delta \cap \mathfrak{b} \uparrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

定理2.2　R_rニ於テ $\mathfrak{a} = \bigvee(\mathfrak{a}_\lambda; \lambda \in I)$ ナルトキ, $\mathfrak{a}$ノ任意ノ元αガ

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad (\alpha_i \in \mathfrak{a}_{\lambda_i})$$

ノ如ク一意的ニアラワサレルタメニ必要ニシテ充分ナル条件ハ$(\mathfrak{a}_\lambda; \lambda \in I)\perp$ナルコトデアル.

(証) (i) 必要　ν_1, ν_2 ヲIノ共通部分ヲモタナイ任意ノ有限部分集合トスレバ. $\bigvee(\mathfrak{a}_\lambda; \lambda \in \nu_1) \cap \bigvee(\mathfrak{a}_\lambda; \lambda \in \nu_2) = (0)$ デアル. 故ニ定理1.1ヨリ $(\mathfrak{a}_\lambda; \lambda \in I)\perp$デアル

(ii) 充分　$\mathfrak{a}$ノ元αガ

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n \quad (\alpha_i, \beta_i \in \mathfrak{a}_{\lambda_i})$$

ノ如クアラワサレタトスル (但シα_i, β_iノ中ニハ0デアルモノモアル) シカルトキハ

$$\beta_1-\alpha_1=(\alpha_2-\beta_2)+\cdots\cdots+(\alpha_n-\beta_n)$$

左辺ハ $\mathfrak{a}_{\lambda_1}$ ニ属ノ．右辺ハ $\mathfrak{a}_{\lambda_2}\vee\cdots\vee\mathfrak{a}_{\lambda_n}$ ニ属スル．故ニ独立性カラ

$\beta_1-\alpha_1=0$

同様ニ　$\alpha_i=\beta_i\quad(i=2,\cdots,n)$

<u>定義2.1</u>　ε ヲ環 R ノ冪等元トスルトキ．ε デ生成サレタ右いでやるヲ $(\varepsilon)_r$ デアラワス．同様ニ左いでやる $(\varepsilon)_l$ ヲ定義スル．$(\varepsilon)_r=\{\xi;\xi=\varepsilon\xi,\ \xi\in\mathcal{R}\}$ デアル．

<u>補題2.2</u>　ε,η ヲ1ヲモツ環 $\mathcal{R}$ ノ冪等元トスルトキ．$(\varepsilon)_r=(\eta)_r$ ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ　$\eta=\varepsilon+\varepsilon\chi(1-\varepsilon)$ ナル $\chi\in\mathcal{R}$ ガ存在スルコトデアル．

〔証〕 V. Neumann 連続幾何学講義 II P.13 Lemma 2.7 ト同一

<u>定理2.3</u>　ε ヲ環 $\mathcal{R}$ ノ冪等元トスルトキ，$(\varepsilon)_r=V(\oplus\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in I)$ ナラバ，$(\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in I)$ ノ中有限個ノモノ例エバ $\mathfrak{a}_{\lambda_1}\cdots\mathfrak{a}_{\lambda_n}$ ヲ除イテハ (0) デアッテ $\mathfrak{a}_{\lambda_i}\ (i=1,\cdots,n)$ ニ對シテハ　次ノ性質ヲモツ冪等元 $\varepsilon_i\ (i=1\cdots,n)$ ガ一意ニ定マル．

(1°)　$\mathfrak{a}_{\lambda_i}=(\varepsilon_i)_r\quad(i=1,\cdots,n)$

(2°)　$i\neq j$ ナラバ　$\varepsilon_i\varepsilon_j=0$，　$\varepsilon\varepsilon_i=\varepsilon_i\varepsilon=\varepsilon_i\quad(i=1,\cdots,n)$.

(3°)　$\varepsilon=\varepsilon_1+\cdots\cdots+\varepsilon_n$.

(証)　$\varepsilon\in V(\oplus\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in I)$ デアルカラ定理2.2ヨリ一意的ニ

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\cdots\cdots+\varepsilon_n\qquad(\varepsilon_i\in\mathfrak{a}_{\lambda_i})$$

ナル $\varepsilon_i\ (i=1,\cdots,n)$ ガ定マル．周知ノ方法ニヨリ　ε_i ハ冪等元デアッテ (1°) (2°) (3°) ヲ満足シ．$(\varepsilon)_r=\underset{1\leq i\leq n}{V\oplus}(\varepsilon_i)_r$ デアル．従ッテ $(\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in I)$ ノ中 $\mathfrak{a}_{\lambda_i}\ (i=1,\cdots n)$ 以外ノモノハ (0) デアル．

〔注意2.1〕 定理2.3カラ R ガ正則環デアルトキハ　ソノ主右いでやる束 $\overline{R}_R$ ハ極大・極小條件ヲ充ストキ以外ハ．R_R ノ部分束トシテ完備束デナイコトガワカル．ナントナレバ．$\overline{R}_R$ ガ R_R ノ部分束トシテ完備束デアッテ　極大條件ヲ充サナイトスレバ．$\mathfrak{a}_1<\mathfrak{a}_2<\cdots$ ナル $\overline{R}_R$ ノ無限列ガ存在スル．$\overline{R}_R$ ハ上連続可補完備束デアルカラ補題1.2ヨリ $\underset{1\leq i<\infty}{V}\mathfrak{a}_i=\underset{1\leq i<\infty}{V\oplus}\mathfrak{b}_i$ ナル主右いでやる $\mathfrak{b}_i\ (i=1,2\cdots)$

ガ存在シ、$(\varepsilon)_r=\bigvee_{i\le k<n}\xi_k\varepsilon_i$ ナル冪等元 ε ガ存在スルカラ定理 2.3 ニ矛盾スル。
$\bar{R}_R$ ハ可補束デアルカラ極大条件ヲ充セバ極小条件モ充ス。

J. v. Neumann ノ連続幾何学ノ講義 II ニ於テ 次数 $n\ge 4$ ナル可補束 L ハ正則環 R ノ主右イデヤル束 $\bar{R}_R$ ニヨッテ同型ニ表現サレルガ、コノトキ L ガ完備束ナラバ 一般ニハコノ完備性ハコノ同型表現ニヨッテ R_R ノ部分束トシテ $\bar{R}_R$ ニ於テハ保タレナイコトガ以上ノコトカラワカル。

§3. 次ニイデヤル束 R_R ノ中心ニツイテ考エル。

<u>定義 3.1</u> 環 R ノスベテノ元 ξ ニ対シテ $\alpha\xi=\xi\alpha$ ナルガ如キ R ノ元 α ノ全体 $\mathfrak{z}$ ヲ R ノ<u>核心</u>トイウ。ε ヲ $\mathfrak{z}$ ニ属スル冪等元トスレバ、$(\varepsilon)_l$ ハ両側イデヤルデ $(\varepsilon)_l=(\varepsilon)_r$ デアル。コレヲ $(\varepsilon)_*$ デアラワス。

<u>定義 3.2</u> 環 R ノ部分環 $(R_\lambda;\lambda\in I)$ ガアッテ、

(1°) $\xi\in R$ ニ対シテ一意的ニ有限個ノ R_{λ_i} $(i=1,\dots,n)$ ノ元 ξ_i ガ定マリ
$$\xi=\xi_{\lambda_1}+\cdots+\xi_{\lambda_n}$$
(2°) $\lambda\neq\mu$ ナルトキ $\xi\in R_\lambda$, $\zeta\in R_\mu$ ナラバ $\xi\zeta=\zeta\xi=0$ ナルトキ

R ハ $(R_\lambda,\lambda\in I)$ ノ<u>直和</u>デアルトイウ。

R ニハ (0) ト R トノ分解以外ニ直和分解ガ存在シナイトキハ R ハ<u>既約</u>デアルトイウ。

<u>定理 3.1</u> 環 R ガ $(R_\lambda;\lambda\in I)$ ノ直和デアルトキハ R_λ ハ R ノ両側イデヤルデアッテ、R_R ニ於テ
$$R=\bigvee(\oplus R_\lambda;\lambda\in I)\qquad(1)$$
デアル。逆ニ両側イデヤル $(R_\lambda;\lambda\in I)$ ニ対シテ (1) ガ成立スルトキハ、R ハ $(R_\lambda;\lambda\in I)$ ノ直和デアル。

[証] (i) R ガ $(R_\lambda;\lambda\in I)$ ノ直和デアルトスル。$\xi\in R$ ナラバ
$$\xi=\xi_{\lambda_1}+\cdots\cdots+\xi_{\lambda_n},\quad \xi_{\lambda_i}\in R_{\lambda_i}\ (i=1,\dots,n)$$
ノ如ク一意的ニアラワサレル。$\zeta\in R_\lambda$ トスレバ
$$\zeta\xi=\begin{cases}\zeta\xi_{\lambda_i} & \lambda=\lambda_i\ \text{ナルトキ}\\ 0 & \lambda\neq\lambda_i\ \text{ナルトキ}\end{cases}$$
故ニ $\zeta\xi\in R_\lambda$ ナレバ R_λ ハ右イデヤルデアル。同様ニ R_λ ハ左イデヤルデア

ル. 定理2.2カラ $R_{\mathcal{R}}$ ニ於テ $\mathcal{R}=V(\mathfrak{z}\,\mathcal{R}_\lambda ;\ \lambda\in\Gamma)$ デアル

(ii) 逆ニ両側いでやる $(\mathcal{R}_\lambda ;\ \lambda\in\Gamma)$ ニ對シテ (1)ガ成立スルトキハ 定理2.2カラ. 定義3.2ノ(1°)ガ成立スル. 次ニ $\xi\in\mathcal{R}_\lambda$ $\zeta\in\mathcal{R}_\mu$ $(\lambda\neq\mu)$ ナラバ $\xi\zeta\in\mathcal{R}_\lambda$, $\xi\zeta\in\mathcal{R}_\mu$ ナレバ $\xi\zeta=0$. 同様ニ $\zeta\xi=0$.

[注意3.1] 定理2.3ヨリ環$\mathcal{R}$ガ1ヲモツトキハ, $\mathcal{R}$ハ有限個ノ両側いでやるノ直和ニシカ分解デキナイ.

<u>定理3.2</u> 環Rガ1ヲモツトキハ Rノ右いでやる$\mathfrak{a}$ニツイテ, 次ノ三命題(α)(β)(γ)ハ同等デアル.

(α) $\mathfrak{a}$ハ$R_{\mathcal{R}}$ノ中心元デアル.

(β) $\mathcal{R}$ノ核心$\mathfrak{Z}$ニ属スル冪等元εガアツテ $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$ デアル.

(γ) $\mathfrak{a}$ハ$R_{\mathcal{R}}$ニ於テ補元$\mathfrak{a}'$ヲモチ, $\mathcal{R}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}'$ハ$\mathcal{R}$ノ直和分解デアル.

コノトキ, $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$ ナルガ如キ冪等元εハ一意的ニ定マル.

[証] (α)→(β): $\mathfrak{a}$ガ$R_{\mathcal{R}}$ノ中心元ナルトキハ, $\mathfrak{a}$ハ唯一ツノ補元$\mathfrak{a}'$ヲモチ. $\mathcal{R}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}'$ デアル. 故ニ定理2.3ヨリ $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$ ナルガ如キ冪等元εガ一意的ニ定マル. 従ツテ補題2.1ヨリスベテノ$\chi\in\mathcal{R}$ニ對シテ $\varepsilon\chi(1-\varepsilon)=0$ デアル. 同様ニシテ $\mathfrak{a}'=(1-\varepsilon)_r$ ハ唯一ツノ補元ヲモツカラ. スベテノ$\chi\in\mathcal{R}$ニ對シテ $(1-\varepsilon)\chi\varepsilon=0$ デアル. 故ニスベテノ$\chi\in\mathcal{R}$ニ對シテ $\varepsilon\chi=\varepsilon\chi\varepsilon=\chi\varepsilon$ ナレバ $\varepsilon\in\mathfrak{Z}$ ニシテ カヽル ε ハ一意的ニ定マル.

(β)→(γ): 定理3.1ヨリ $\mathcal{R}=(\varepsilon)_r\oplus(1-\varepsilon)_r$ ハ$\mathcal{R}$ノ直和分解デアル.

(γ)→(α): 定理3.1ヨリ $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}'$ハ両側いでやるデアツテ 定理2.3ヨリ $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$, $\mathfrak{a}'=(1-\varepsilon)_r$ ナルガ如キ冪等元εガ存在スル. $\mathfrak{b}$ヲ任意ノ右いでやるトスレバ. $\alpha\in\mathfrak{b}$ナルトキ, $\alpha=\alpha\varepsilon+\alpha(1-\varepsilon)$ ニ於テ $\alpha\varepsilon\in\mathfrak{b}$, $\alpha\varepsilon\in\mathfrak{a}$ ナレバ. $\alpha\varepsilon\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}$. 同様ニ $\alpha(1-\varepsilon)\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}'$. 故ニ $\mathfrak{b}=(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a})\oplus(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}')$. 従ツテ $\mathfrak{a}$ハ$R_{\mathcal{R}}$ノ中心元デアル. (J. Neumann 連続幾何学講義 I, p.8, Lemma 1.2ヨリ)

<u>定理3.3</u> 環$\mathcal{R}$ガ1ヲモツトキ, 次ノ三命題(α),(β),(γ)ハ同義デアル.

(α) $\mathcal{R}$ ハ既約デアル.

(β) $R_{\mathcal{R}}$ハ既約デアル.

(γ) $\mathcal{R}$ノ核心ニ属スル冪等元ハ0ト1トダケデアル.

〔証〕 定理3.2カラ明カデアル．

〔注意3.2〕 Rガ正則環ナルトキハ $R_{\mathfrak{R}}$ ノ中心元ハ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ中心元デアルカラ，定理3.2，定理3.3ニ於テ $R_{\mathfrak{R}}$ ノ代リニ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ヲオイタ定理ガ成立スル．コレラハ J. Neumann 連続幾何学講義 II p.12–14 ニ出テイル．

〔注意3.3〕 注意2.1ト同様ナ理由デ，環Rガ1ヲモツトキハ，$R_{\mathfrak{R}}$ ノ中心 $Z_{\mathfrak{R}}$ ガ $R_{\mathfrak{R}}$ ノ部分束トシテ完備束デアルナラバ，$Z_{\mathfrak{R}}$ ハ極大極小条件ヲ充ス．

〔注意3.4〕 環Rガ1ヲモツトキ，上連続環束 $R_{\mathfrak{R}}$ ガ更ニ下連続束デアルナラバ定理1.2カラ $R_{\mathfrak{R}}$ ノ中心 $Z_{\mathfrak{R}}$ ハ $R_{\mathfrak{R}}$ ノ部分束トシテ完備束デアルカラ，注意3.3ヨリ $Z_{\mathfrak{R}}$ ハ極大極小条件ヲ充ス．